数理解析研究所講究録 1321 巻 2003 年 92-107

F階数1のユニタリ群の表現*

今野 和子 [†]

目次

1 導入

表現論の最も重要な動機の一つは与えられた代数系による対称性を持つ関数の族を構成すること、より正確には既約表現を構成することである。境界値を通じて関数をとらえる実解析の古典的な手法は、簡約群の表現論においては境界を与える放物型部分群からの誘導表現の研究に置き換えられる。例えば実 Lie 群の場合には、すべての既約表現は極小放物型部分群からの誘導表現（主系列表現）の組成因子として得られることが知られている。また無限小指標と K タイプの解析により、主系列表現がいつ可約になるか、またその場合の組成因子についてもよくわかっている。p進群の場合には、任意の真放物型部分群からの誘導表現に含まれない、いわゆる（超）カスプ表現が存在するため事態は複雑に

*数理研短期共同研究「p進群の調和解析」(2002 年 7 月 1〜5 日) での講演録。

†京都大学大学院人間環境学研究科
電子メール:kkonno@math.h.kyoto-u.ac.jp, KazukoKonno@aol.com
ホームページ:http://knmac.math.kyushu-u.ac.jp/~kkonno/Kazuko.html

なる。しかし依然既約表現が放物型部分群（自分自身のこともある）からの誘導表現の組成因子であるという図式は正しく、放物型誘導表現の研究の重要性は変わらない。

この際に p 進群でまず問題となるのは放物型部分群の可約性の判定が困難なことである。Jacquet-Langlands による $GL(2)$ の場合などは、主系列表現の $SL(2)\times O(1,1)$ の Weil 表現による実現に強く依存している [JL70]。また Bernstein-Zelevinsky による $GL(n)$ の放物型誘導表現の研究も Gelfand-Kazhdan による表現の「微分」という特殊な手法によっている [BZ76], [BZ77], [Zel80]。一方で Shahidi は大域的な Eisenstein 級数の理論を用いて、一般の準分裂簡約群上の放物型誘導表現の可約性について部分的な結果を得た [Sha90]。彼はまず群が有理的な Borel 部分群を持つすなわち準分裂であることを要求し、つぎに誘導する既約表現が Borel 部分群のユニポテント根基の非退化指標に関する Whittaker 模型を持つことを要求する。これらの条件の下で、Shahidi は既約表現の Whittaker 模型の一意性を用いて、放物型誘導表現の Plancherel 測度を Eisenstein 級数の定数項に現れる L 関数の局所因子に結びつけた。これにより、定数項の L 関数の局所因子が完全に計算されている場合には、Whittaker 模型を持つカスプ表現からの誘導表現の可約性が判定できる (例えば [ST93], [Mui97], [Kon01])。

$GL(n)$, $SL(n)$ 以外の p 進群はユニポテントカスプ表現を持つため、群が準分裂であっても誘導する表現が Whittaker 模型を持たなければ可約点の決定は未解決である。しかし、可約点に関する予想を仮定すれば、一般の古典群の既約緩増加表現が完全に分類できるという結果もあり [Mœgl], [MT02]、p 進群の放物型誘導表現の研究は可約点のそれに集約されるといってもよい。そこでこのノートでは準分裂でない p 進群の主系列表現の可約点を考察する。扱う群としてはユニタリ群を選び、大域的な Jacquet-Langlands 対応を用いてその主系列表現の Plancherel 測度を決定する。特に４変数ユニタリ群の場合にはこれを用いて既約ユニタリ表現が完全に分類できる。四元数体上のユニタリ群の Siegel 放物型部分群からの誘導表現に対する同様の構成が [MS00] で行われている。

この原稿の構成は以下の通りである。2節では p 進体上の非準分裂ユニタリ群の主系列表現の Plancherel 測度を考察する。2.1で記号を用意した後、2.2では Deligne-Kazhdan の簡略跡公式を復習する。続く 2.3ではそれを用いて、代数体上の２変数ユニタリ群上のあるカスプ表現を構成し、それに対する清水-Jacquet-Langlands 対応を用意する。これと大域的な絡作用素の関数等式を組み合わせることにより、非準分裂ユニタリ群の主系列表現の Plancherel 測度をその準分裂内部形式の対応する表現のそれに結びつける 2.4。3節では例として４変数ユニタリ群の場合の既約ユニタリ表現を分類する。3.1では前節の主結果、命題 2.4を使って一般の非準分裂ユニタリ群の主系列表現の Plancherel 測度を具体的に計算し、それの可約点を決定する (定理 3.1)。４変数の場合の既約ユニタリ表現の分類はこれを [Kon01] の議論と組み合わせることにより得られる (3.2節)。

この原稿を作成するに当たって九州大学の「簡約群と保型形式セミナー」の内容やそこでの議論が役立った。またこの研究集会で話す機会を与えてくださった主催者の齋藤裕先生、ホームページの維持や報告集の作成に当たって下さった高橋哲也氏に深く感謝いたし

2 ユニタリ群の主系列表現のPlancherel測度

2.1 p進ユニタリ群とその主系列表現

Fを標数0の非アルキメデス局所体とし、その二次拡大$E = F(\delta)$, $(\Delta := \delta^2 \in F^\times)$を取る。類体論によりこの拡大に付随する$F^\times$の二次指標を$\omega_{E/F}$、Galois群$\mathrm{Gal}(E/F)$の生成元を$\sigma$と書く。$\mathcal{O} \supset \mathfrak{p}$と$|\ |_E$で各々$F$の整数環、その唯一の極大イデアルおよび$F$のモジュラスを表す[Wei]。$F$の$E$を含む代数閉包$\bar{F}$を固定し、$F$の絶対Galois群およびWeil群を各々$\Gamma := \mathrm{Gal}(\bar{F}/F)$, $W_F := W_{\bar{F}/F}$と書く[Tat79]。同様にEに対しても添え字Eを付けた類似の記号を用いる。$\gamma \in F^\times \backslash \mathrm{N}_{E/F}(E^\times)$を固定する。

E上の2次元エルミート空間の等距類は二つしかなく、それらの代表元は

$$V_2 := (E^2, \begin{pmatrix} -\gamma & \\ & 1 \end{pmatrix}), \quad V_2^* := (E^2, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix})$$

で与えられる。同様にE上の$2n$次元エルミート空間の等距類の集合は

$$V_{2n} := V_2^{*\oplus n-1} \oplus V_2, \quad V_{2n}^* := V_2^{*\oplus n}$$

の二つからなる。エルミート空間V_{2n}, V_{2n}^*のユニタリ群をそれぞれG_{2n}, G_{2n}^*と書き、これらを任意の可換F代数Rに対して

$$G_{2n}(R) = \left\{ g \in GL(2n, R \otimes_F E) \,\middle|\, \mathrm{Ad}\left(\left(\begin{array}{c|c|c} & & I_{n-1} \\ \hline & \begin{matrix} -\gamma & \\ & 1 \end{matrix} & \\ \hline I_{n-1} & & \end{array}\right)\right) g = {}^t\sigma(g)^{-1} \right\},$$
$$G_{2n}^*(R) = \{ g \in GL(2n, R \otimes_F E) \,|\, \mathrm{Ad}(I_{2n}) g = {}^t\sigma(g)^{-1} \}$$

となるよう実現しておく。但し、

$$I_n := \begin{pmatrix} & & & 1 \\ & & 1 & \\ & \iddots & & \\ 1 & & & \end{pmatrix} \in GL(n, R \otimes_F E)$$

と書いた。$G_{2n}^* = U_{E/F}(n,n)$はG_{2n}のF上準分裂な内部形式である。$G_{2n}(F)$の上三角元からなる極小放物型部分群を$P_0 = M_0 U_0$と書く。$M_0 \simeq (\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m)^{n-1} \times G_2$である。対応して$G_{2n}^*$の放物型部分群$P_0^* = M_0^* U_0^*$を上三角Borel部分群を含み、$M_0^* \simeq (\mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m)^{n-1} \times G_2^*$であるものに取る。これは$G_{2n}^*$の極小放物型部分群ではない（記号に反して）ことに注意する。

一般にF上の連結簡約群Gに対して、$G(F)$の既約許容表現の同型類の集合を$\Pi(G(F))$と書く。$\Pi_{\mathrm{unit}}(G(F)) \supset \Pi_2(G(F)) \supset \Pi_0(G(F))$でおのおの、$\Pi(G(F))$内のユニタリ化可

能、二乗可積分、(ユニタリ) カスプ的な元たちのなす部分集合を表す。上の状況に戻って、任意の $\Pi_0(M_0(F))$ の元は

$$\underline{\chi}\otimes\tau : M_0(F) \ni \mathrm{diag}(a_1,\dots,a_{n-1};g;\sigma(a_{n-1})^{-1},\dots,\sigma(a_1)^{-1}) \longmapsto \prod_{i=1}^{n-1}\chi_i(a_i)\tau(g) \in GL(V_\tau)$$

と書ける。ただし、$\underline{\chi}=(\chi_1,\dots,\chi_{n-1})\in\Pi_{\mathrm{unit}}(E^\times)^{n-1}$ であり τ の表現空間を V_τ と書いた。$\underline{\lambda}=(\lambda_1,\dots,\lambda_{n-1})\in\mathbb{C}^{n-1}$ に対して

$$\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau := \chi_1|\ |_E^{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1}|\ |_E^{\lambda_{n-1}}\otimes\tau$$

と書き、これからの放物型誘導表現

$$I_{P_0}^{G_{2n}}(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau) := \mathrm{ind}_{P_0(F)}^{G_{2n}(F)}[(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau)\otimes\mathbf{1}_{U(F)}]$$

を $G_{2n}(F)$ の（一般化された）**主系列表現**と呼ぶ。

このセクションではこの主系列表現の可約点を決定する。そのために大域的な代数体上の議論により $I_{P_0}^{G_{2n}}(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau)$ の **Plancherel 測度**を Jacquet-Langlands 対応で対応する $G_{2n}^*(F)$ の放物型誘導表現のそれに結びつける。

2.2 Deligne-Kazhdan の簡略跡公式

ここでは大域的な状況に移行する際に用いられる Deligne-Kazhdan の簡略跡公式を復習する。

設定 k を大域体 (正標数でもよい)、$\mathbb{A} := \mathbb{A}_k$ をそのアデール環とする。$\mathbb{A}$ の無限、及び有限成分をそれぞれ $\mathbb{A}_\infty$, $\mathbb{A}_f$ で表す。G を k 上の連結簡約線形代数群としその中心を Z と書く。局所コンパクト位相群 $G(\mathbb{A}) := \prod'_v G(k_v)$, $Z(\mathbb{A}) := \prod'_v Z(k_v)$ 上の不変測度 $dg=\prod_v dg_v$, $dz=\prod_v dz_v$ を固定する。$G(\mathbb{A})$ の離散部分群 $G(k)$ 上には各点が測度 1 を持つ不変測度を取り、これらにより定まる $G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 上の商測度をやはり dg と書く。

$Z(\mathbb{A})$ の保型指標 $\omega := \bigotimes_v \omega_v : Z(k)\backslash Z(\mathbb{A}) \longrightarrow \mathbb{C}^1$ を固定する。$G(\mathbb{A})$ 上の可測関数 ϕ で

- $\phi(\gamma zg)=\omega(z)\phi(g)$, $(\forall\gamma\in G(k),\ z\in Z(\mathbb{A}),\ g\in G(\mathbb{A}))$.
- 特に $|\phi|$ は $G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ 上の関数と見なせるが、これは二乗可積分

$$\int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})}|\phi(g)|^2\,dg < +\infty.$$

を満たすもののなす Hilbert 空間を $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ で表す。この上の $G(\mathbb{A})$ の右正則表現

$$[R(g)\phi](x) := \phi(xg),\quad g\in G(\mathbb{A}),\ \phi\in L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$$

を考える。

無限素点 v では、滑らかな $G(k_v)$ の関数 f_v であって

(a) f は両側 $\mathbf{K}_v$ 有限。

(b) f_v は $Z(k_v)$ を法としてコンパクトな台を持つ。

(c) 任意の $z \in Z(k_v)$, $g \in G(k_v)$ に対して $f(zg) = \overline{\omega_v(z)} f(g)$。

を満たすものの空間を $\mathcal{H}(G(k_v), \omega_v)$ と書く。有限素点 v でもこの (b), (c) を満たす $G(k_v)$ 上の局所定数関数の空間を $\mathcal{H}(G(k_v), \omega_v)$ で表す。$G(\mathbb{A})$ の極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_v \mathbf{K}_v$ を固定する。有限個をのぞくすべての有限素点 v では $\mathbf{K}_v$ は hyperspecial であり $\omega_v|_{Z(k_v)\cap \mathbf{K}_v}$ は自明である。よって、$\mathbf{K}_v$ の特性関数を $\mathrm{Ch}_{\mathbf{K}_v}$ として、

$$f_v^0(g) := \int_{Z(k_v)} \mathrm{Ch}_{\mathbf{K}_v}(zg)\omega(z)\, dz$$

は定義可能な $\mathcal{H}(G(k_v), \omega_v)$ の元である。そこで $\mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$ を $f = \bigotimes_v f_v$, $(f_v \in \mathcal{H}(G(k_v), \omega_v))$ であって有限個を除くすべての有限素点 v で $f_v = f_v^0$ であるものたちの張るベクトル空間と定義する。

$f \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}), \omega)$ に対して $L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ 上の作用素

$$[R(f)\phi](x) := \int_{G(\mathbb{A})/Z(\mathbb{A})} f(g)[R(g)\phi](x)\, dg = \int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} K_f(x,y)\phi(y)\, dy$$

は定義可能であり、

$$K_f(x,y) := \sum_{\gamma \in G(k)/Z(k)} f(x^{-1}\gamma y)$$

を積分核とする積分作用素である。

超カスプ的なテスト関数　$\phi \in L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ の P に沿っての定数項を

$$\phi_P(g) := \int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A})} \phi(ug)\, du$$

と定義する。任意の真放物型部分群 $P \subsetneq G$ に対して、$G(\mathbb{A})$ 上ほとんど至るところで $\phi_P = 0$ となる $\phi \in L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ の空間を $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ と書き、**L^2 カスプ形式の空間**と呼ぶ。これは $G(\mathbb{A})$ の作用 R で不変な閉部分空間である。R の $L^2_0(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ への制限を R_0 で表す。

事実 2.1. [Piatetski-Shapiro] R_0 は $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の直和に分解し、そこでの各既約ユニタリ表現の重複度は有限である:

$$R_0 \simeq \widehat{\bigoplus}_{\pi \in \Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))_\omega} \pi^{\oplus m_0(\pi)}.$$

ここで中心指標が ω である $G(\mathbb{A})$ の既約ユニタリ表現の同型類の集合を $\Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))_\omega$ と書いた。

Duflo-Labesse の議論 [DL71, I.1.11], [Art78, § 4] により作用素 $R_0(f)$ は跡族であることが知られている。すなわち $R_0(f)$ の積分核を $K_{f,0}(x,y)$ とすれば、

$$\mathrm{tr}(R_0(f)) := \int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} K_{f,0}(x,x)\,dx$$

は絶対収束している。

$f \in \mathcal{H}(G(k_v),\omega_v)$ が**超カスプ的**であるとは任意の真放物型部分群 $P_v = M_vU_v \subsetneq G_v$ に対して

$$\int_{U(k_v)} f(xuy)\,du = 0, \quad \forall x, y \in G(k_v)$$

となることとする。$f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$ のとき

$$\begin{aligned}\int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A})} K_f(ux,y)\,du &= \int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A})} \sum_{\gamma\in U(k)Z(k)\backslash G(k)} \sum_{\nu\in U(k)} f(x^{-1}u^{-1}\nu\gamma y)\,du \\ &= \sum_{\gamma\in U(k)Z(k)\backslash G(k)} \int_{U(\mathbb{A})} f(x^{-1}u^{-1}\gamma y)\,du \\ &= \sum_{\gamma\in U(k)Z(k)\backslash G(k)} \prod_v \int_{U(k_v)} f_v(x_v^{-1}u_v\gamma y_v)\,du_v\end{aligned}$$

である。特にある有限素点 v_c で f_{v_c} が超カスプ的ならば $\phi \in L^2(G(k)\backslash G(\mathbb{A}))_\omega$ と真放物型部分群 $P \subset G$ に対して

$$\begin{aligned}(R(f)\phi)_P(x) &= \int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A})} \int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} K_f(ux,y)\phi(y)\,dy\,du \\ &= \int_{G(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} \int_{U(k)\backslash U(\mathbb{A})} K_f(ux,y)\,du\phi(y)\,dy\end{aligned}$$

は常に消えている。すなわち、$K_f(x,y) = K_{f,0}(x,y)$ である。

楕円的共役類　$\gamma \in G(k)$ に対してその中心化群を $G^\gamma := \mathrm{Cent}(\gamma, G)$、その単位元の連結成分を $G_\gamma := G^{\gamma,0}$ で表す。$G(k)$ 内の正則半単純な元、すなわち G_γ がトーラスである半単純な $\gamma \in G(k)$ の集合を $G(k)_{\mathrm{reg}}$ と書く。$\gamma \in G(k)_{\mathrm{reg}}$ が**楕円的**とは、G_γ が Z を法として k 上非等方的であることとする。特に $G_\gamma(k)Z(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})$ はコンパクトである。$G(k)_{\mathrm{reg}}$ 内の楕円的な元のなす部分集合を $G(k)_{\mathrm{ell}}$ と書く。

事実 2.2. [Deligne-Kazhdan の簡略跡公式 [Hen84], [DKV84]] $f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}(G(\mathbb{A}),\omega)$ が

(i) ある有限素点 v_c で f_{v_c} は超カスプ的

(ii) 別のある素点 v_e で f_{v_e} の台は $G(k_{v_e})_{\mathrm{ell}}$ に含まれる

を満たしているとする。このとき、

$$\sum_{\substack{\gamma\in G(k)_{\mathrm{ell}}/Z(k)\\ \mathrm{mod}\ 共役}} \frac{\mathrm{meas}(G_\gamma(k)Z(\mathbb{A})\backslash G_\gamma(\mathbb{A}))}{[G^\gamma(k):G_\gamma(k)]} O_\gamma(f) = \sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{unit}}(G(\mathbb{A}))_\omega} m_0(\pi)\mathrm{tr}\pi(f)$$

が成り立つ。ここで $O_\gamma(f)$ は f の γ での**軌道積分**

$$O_\gamma(f) := \int_{G_\gamma(\mathbb{A})\backslash G(\mathbb{A})} f(x^{-1}\gamma x)\,dx$$

である。

2.3 清水-Jacquet-Langlands 対応

2.3.1 局所対応

本来の局所清水-Jacquet-Langlands 対応は、任意の固有値を共有する $\gamma^D \in D^\times_{\mathrm{reg}}$ と $\gamma \in GL(2,F)_{\mathrm{ell}}$ に対する指標等式 $\theta_{\tau^D}(\gamma^D) = -\theta_\tau(\gamma)$ で特徴づけられる、二乗可積分表現の対応

$$\Pi_2(GL(2,F)) \ni \tau \longmapsto \tau^D \in \Pi(D^\times), \tag{2.1}$$

であった。これを 2 変数ユニタリ群の二乗可積分 L パケットの対応に書き換える。

V_2^* と V_2 のユニタリ相似変換群を各々 $\widetilde{G}_2^*$, $\widetilde{G}_2$ と書く。Δ で対角埋め込み $z \mapsto (z, z1_2)$ を表すと、

$$\widetilde{G}_2^* \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m \times GL(2)/\Delta\mathbb{G}_m, \quad \widetilde{G}_2 \simeq \mathrm{Res}_{E/F}\mathbb{G}_m \times D^\times/\Delta\mathbb{G}_m$$

である。$\widetilde{G}_2^*(F)$ と $\widetilde{G}_2(F)$ の中心 $\widetilde{Z}_2(F) \simeq E^\times$ の指標 ω に対して (2.1) から $\widetilde{G}_2(F)$ に対する清水-Jacquet-Langlands 対応

$$\Pi_2(\widetilde{G}_2^*(F))_\omega \ni \omega\otimes\tau \longmapsto \omega\otimes\tau^D \in \Pi(\widetilde{G}_2(F))_\omega \tag{2.2}$$

を定義する。但し、$\Pi(\widetilde{G}_2^*(F))$ と $\Pi(\widetilde{G}_2(F))$ の元で ω を中心指標にもつものの集合を各々 $\Pi(\widetilde{G}_2^*(F))_\omega$, $\Pi(\widetilde{G}_2(F))_\omega$ と書いた。L パケットの定義 [Rog90, 11.1] から $G_2^*(F)$ の L パケットは $\widetilde{G}_2^*(F)$ のある既約表現 $\widetilde{\pi}$ の制限 $\widetilde{\pi}|_{G_2^*(F)}$ の既約成分からなる。$G_2(F)$ に対しても同様である。従って (2.2) は $G_2^*(F)$ の二乗可積分 L パケットと $G_2(F)$ のそれらとの間の清水-Jacquet-Langlands 対応を与える。この対応を JL で表す。

2.3.2 大域対応—あるカスプ形式の存在

代数体の二次拡大 K/k で二つの有限素点 v_1, v_2 で $K_{v_i}/k_{v_i} \simeq E/F$ となるものが取れる。ただし、k の素点 v に対して $K_v := K\otimes_k k_v$ と書いている。K/k に関する二変数非等方的ユニタリ群 ${}^\circ G$ で

- ${}^\circ G(k_{v_1}) \simeq {}^\circ G(k_{v_2}) \simeq G_2(F)$.
- 任意の $v \neq v_1,\, v_2$ で ${}^\circ G_v := {}^\circ G \otimes_k k_v$ は準分裂。

を満たすものが存在する。ここでは局所成分にあらかじめ指定された $\tau \in \Pi_0(G_2(F))$ を持つ ${}^\circ G(\mathbb{A})$ のカスプ保型表現を構成する。[LL79] の結果などを用いてより完全な大域対応を作ることも可能だが、我々の目的にはこのカスプ保型表現に対する対応だけで十分である。

補題 2.3. (i) $\tau \in \Pi_0(G_2(F))$ に対して、${}^\circ G(\mathbb{A})$ のカスプ表現 $\tau_{\mathbb{A}} = \bigotimes_v \tau_v$ で

$$\tau_{v_1} \simeq \tau_{v_2} \simeq \tau$$

を満たすものが存在する。
(ii) 上の τ を含む G_2 の L パケットを T と書く。このとき $\tau^* \in \mathrm{JL}(T)$ で、

- $\tau^*_{v_1} \simeq \tau^*_{v_2} \simeq \tau^*$;
- $\tau^*_v \simeq \tau_v$, $(\forall v \neq v_1,\, v_2)$

で定まる k 上の準分裂 2 変数ユニタリ群 ${}^\circ G^*$ のアデール群の既約表現 $\tau^*_{\mathbb{A}} := \bigotimes_v \tau^*_v$ が ${}^\circ G^*(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現であるものがある。

証明. (ii) は (i) と [LL79] の $\{g \in GL(2) \mid \det g \in \mathrm{imN}_{K/k}\}$ に対する Jacquet-Langlands 対応の帰結である。(i) を示そう。τ を ${}^\circ G(k_{v_i})$, $(i = 1,\, 2)$ の表現と見てその指標関数 θ_τ を考える。θ_τ は ${}^\circ G(k_{v_i})_{\mathrm{reg}}$ 上の局所定数関数で ${}^\circ G(k) \cap {}^\circ G(k_{v_i})_{\mathrm{ell}}$ は ${}^\circ G(k_{v_i})_{\mathrm{ell}}$ で稠密だから、${}^\circ G(k_{v_i})$, $(i = 1,\, 2)$ で楕円的な $\gamma_0 \in {}^\circ G(k)$ で $\theta_\tau(\gamma_0) \neq 0$ なるものが存在する。v_1, v_2 とそれ以外の素点 v_3 の三つからなる集合を S とおき、$\mathbb{A}^S := \{(a_v)_v \in \mathbb{A} \mid a_v = 0, \forall v \in S\}$ と書く。${}^\circ G$ の中心 ${}^\circ Z$ の保型指標 $\omega = \bigotimes_v \omega_v : {}^\circ Z(k)\backslash {}^\circ Z(\mathbb{A}) \to \mathbb{C}^1$ で $\omega_{v_1} = \omega_{v_2} = \omega_\tau$($\tau$ の中心指標) となるものを固定し、$f = \bigotimes_v f_v \in \mathcal{H}({}^\circ G(\mathbb{A})/{}^\circ Z(\mathbb{A}), \omega)$ を次のように選ぶ。$f_S := \bigotimes_{i=1}^3 f_{v_i}$, $f^S := \bigotimes_{v \notin S} f_v$ と書く。

(i) f_{v_1}, f_{v_2} は τ の行列成分。τ は超カスプ的だからその行列成分は $\mathcal{H}({}^\circ G(k_{v_i}), \omega_{v_i})$ の超カスプ的な元であることに注意する。

(ii) $\mathrm{supp} f_{v_3} \subset {}^\circ G(k_{v_3})_{\mathrm{ell}}$ かつ $O_{\gamma_0}(f_{v_3}) \neq 0$。

(iii) ${}^\circ G(\mathbb{A}^S)$ の十分小さい開部分集合 Ω^S で $\mathrm{supp}\, f_S \times {}^\circ Z(\mathbb{A}^S)\Omega^S \cap {}^\circ G(k)_{\mathrm{ell}} = \gamma_0 {}^\circ Z(k)$ であるものが取れる。f^S を

 (a) $\mathrm{supp}\, f^S \subset {}^\circ Z(\mathbb{A}^S)\Omega^S$;

 (b) $f^S(g) \geq 0$, $(\forall g \in {}^\circ G(\mathbb{A}^S))$;

 (c) $f^S(\gamma_0) \neq 0$

 なるものに選んでおく。

(i), (ii) から f には簡略跡公式 (事実 2.2) が適用可能である。(iii) から $\gamma \neq \gamma_0 \in {}^\circ G(k)_{\mathrm{ell}}$ に対しては $O_\gamma(f^S)=0$ であるから、簡略跡公式の幾何サイド (事実 2.2の左辺) は

$$\mathrm{meas}({}^\circ G_{\gamma_0}(k){}^\circ Z(\mathbb{A})\backslash {}^\circ G_{\gamma_0}(\mathbb{A}))\prod_{v\in S} O_{\gamma_0}(f_v)O_{\gamma_0}(f^S) \tag{2.3}$$

に単純化する。さて超カスプ表現の行列成分 f_{v_i} の軌道積分については

$$O_{\gamma_0}(f_{v_i}) = \frac{f_{v_i}(1)}{d(\tau)}\mathrm{meas}(G_{2,\gamma_0}(F)/A_{G_2}(F))\overline{\theta_\tau(\gamma_0)}$$

が成り立つ [DKV84, 命題 A.3.e]。ここで $d(\tau)$ は τ の形式次数 ([今, 補題 6.2]) であり、A_{G_2} は G_2 の中心内の極大 F 分裂トーラスである。これと γ_0 の選び方および (ii), (iii) から (2.3) は消えていないので、スペクトルサイド (事実 2.2の右辺)

$$\sum_{\pi\in\Pi_{\mathrm{unit}}({}^\circ G(\mathbb{A}))_\omega} m_0(\pi)\mathrm{tr}\pi(f)$$

も同様である。すなわち ${}^\circ G(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現 $\tau_{\mathbb{A}}$ で

$$0\neq \mathrm{tr}\tau_{\mathbb{A}}(f) = \prod_v \mathrm{tr}\tau_v(f_v)$$

なるものが存在する。しかもこれは、(i) と Schur の直交関係 [今, 補題 6.2] から $\tau_{v_1}\simeq\tau_{v_2}\simeq\tau$ を意味している。 □

2.4 Plancherel 測度の対応

再び p 進体 F 上の状況に戻る。一般に F 上の連結簡約群 G とその放物型部分群 $P=MU$ を考える。$M(F)^1 := \bigcap_\chi \ker|\chi|_F$ とおく。ただし χ は M の F 有理指標全体を走る。$\widehat{A}_M := \mathrm{Hom}(M(F)/M(F)^1, \mathbb{C}^\times)$ は $\mathbb{C}$ トーラスになる [今, 2.1]。$\pi\in\Pi_2(M(F))$ と $\lambda\in\widehat{A}_M$ に対して、$\pi[\lambda] := e^\lambda\otimes\pi$ からの放物型誘導表現 $I_P^G(\pi[\lambda])$ が考えられる。さらに、M に関して P と相対する放物型部分群を $\bar{P}=M\bar{U}$ として、絡作用素

$$J_{\bar{P}|P}(\pi[\lambda]) : I_P^G(\pi[\lambda]) \longrightarrow I_{\bar{P}}^G(\pi[\lambda])$$

が定義されていた。これは $\lambda\in\widehat{A}_M$ の有理関数で、その極以外では $G(F)$ 加群の準同型を定めていた。さらに両辺の誘導表現は $\widehat{A}_M$ のある Zariski 開集合上で既約であるため Schur の補題により、$\widehat{A}_M$ 上の有理関数 $\widehat{A}_M \ni \lambda\mapsto j(\pi[\lambda])\in\mathbb{C}$ で

$$J_{P|\bar{P}}(\pi[\lambda])\circ J_{\bar{P}|P}(\pi[\lambda]) = j(\pi[\lambda])$$

なるものがある。このとき、$\pi[\lambda]$ の Plancherel 測度を

$$\mu^G(\pi[\lambda]) = \mu(\pi[\lambda]) := j(\pi[\lambda])^{-1}\gamma(G/M)^2$$

と定義していた [今, § 9]。$\gamma(G/M)$ は [今, 2.4] にもある正定数である。

ユニタリ群 G_{2n} とその主系列表現 $I_{P_0}^{G_{2n}}(\underline{\chi}\otimes\tau)$ を考えていた。Plancherel 測度の積公式 [今, 補題 9.1] から

$$\begin{aligned}\mu^{G_{2n}}(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau) = &\prod_{1\le i<j\le n-1}\mu^{GL(2)_E}(\chi_i[\lambda_i]\otimes\chi_j[\lambda_j])\mu^{GL(2)_E}(\chi_i[\lambda_i]\otimes\sigma(\chi_j)^{-1}[-\lambda_j])\\ &\times\prod_{i=1}^{n-1}\mu^{G_2^*}(\chi_i[\lambda_i])\mu^{G_4}(\chi_i[\lambda_i]\otimes\tau)\end{aligned} \tag{2.4}$$

が成り立つ。ここで右辺の第 1 行目および第 2 行目の第 1 項は [JL70] で計算されているから、結局 $\mu^{G_4}(\chi_i[\lambda_i]\otimes\tau)$ のみを計算すればよい。より強く次が示せる。

命題 2.4. $P = MU$ を $M\simeq \mathrm{Res}_{E/F}GL(n-1)\times G_2$ なる G_{2n} の標準放物型部分群とし、対応する G_{2n}^* の標準放物型部分群を $P^* = M^*U^*$ と書く。$\rho\otimes\tau\in\Pi_0(M(F))$, $s\in\mathbb{C}$ に対して

$$\gamma(G_{2n}/M)^{-2}\mu^{G_{2n}}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau) = \gamma(G_{2n}^*/M^*)^{-2}\mu^{G_{2n}^*}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau^*),\quad \forall\tau^*\in\mathrm{JL}(T)$$

が成り立つ。ここで T は τ を含む $G_2(F)$ の唯一の L パケットである。

証明. K/k および k の有限素点 v_1, v_2 を 2.3節の通りとする。同節と同じようにして、K/k に付随する $2n$ 変数ユニタリ群 G であって、

- $G_{v_i} := G\otimes_k k_{v_i}\simeq G_{2n}$;
- $v\neq v_1, v_2$ で G_v は準分裂。

なるものが取れる。$P = MU$ をその放物型部分群で $M\simeq\mathrm{Res}_{K/k}GL(n-1)\times{}^\circ G$ なるものとする。対応する $2n$ 変数準分裂ユニタリ群 G^* の放物型部分群を $P^* = M^*U^*$ とする。補題 2.3(i) から $M(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現 $\rho_{\mathbb{A}}\otimes\tau_{\mathbb{A}} = \bigotimes_v\rho_v\otimes\tau_v$ で $\rho_{v_1}\simeq\rho_{v_2}\simeq\rho$, $\tau_{v_1}\simeq\tau_{v_2}\simeq\tau$ を満たすものが存在する。同様に補題 2.3(ii) から $\tau^*\in\mathrm{JL}(T)$ で $\rho_{\mathbb{A}}\otimes\tau_{\mathbb{A}}^*$ が $M^*(\mathbb{A})$ の既約カスプ表現となるものが取れる。ただし $\tau_{\mathbb{A}}^*$ は同補題の通りとする。

さて $G(\mathbb{A})$ の $P = MU$ に関してよい位置にある極大コンパクト部分群 $\mathbf{K} = \prod_v\mathbf{K}_v$ を固定し、k の素点の有限集合 S であって、

- S はアルキメデス素点を全て含む。
- $v\notin S$ では、K_v/k_v, ρ_v, τ_v は全て不分岐で、ψ_v は位数 0 である。

なるものを取る。$v\notin S$ では $I_{P(k_v)}^{G(k_v)}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)$, $I_{\bar{P}(k_v)}^{G(k_v)}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)$ はおのおの特別な $\mathbf{K}_v$ 不変ベクトル ϕ_v^0, $\phi_v^{0,\vee}$ を持ち、それらに対しては Gindikin-Karpelevich 公式 [Lan71, p. 45]

$$J_{\bar{P}|P}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)\phi_v^0 = \frac{L(s,\tau_v^\vee\times\rho_v)L_{\mathrm{Asai}}(2s,\rho_v)}{L(s+1,\tau_v^\vee\times\rho_v)L_{\mathrm{Asai}}(2s+1,\rho_v)}\phi_v^{0,\vee}$$

$$J_{P|\bar{P}}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)\phi_v^{0,\vee} = \frac{L(-s,\tau_v\times\rho_v^\vee)L_{\mathrm{Asai}}(-2s,\rho_v^\vee)}{L(1-s,\tau_v\times\rho_v^\vee)L_{\mathrm{Asai}}(1-2s,\rho_v^\vee)}\phi_v^0$$

が成り立つ。ただし、$L(s,\tau_v\times\rho_v)$ は ${}^\circ G(k_v)\times\mathrm{Res}_{K_v/k_v}GL(2)$ の積 L 関数の、$L_{\mathrm{Asai}}(s,\rho_v)$ は $\mathrm{Res}_{K_v/k_v}GL(2)$ の浅井・織田 L 関数のそれぞれ Euler 因子である。特に $I_{P(\mathbb{A})}^{G(\mathbb{A})}(\rho_{\mathbb{A}}[s]\otimes\tau_{\mathbb{A}})\simeq\bigotimes_v I_{P(k_v)}^{G(k_v)}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)$ の元で $\phi=\bigotimes_{v\in S}\phi_v\otimes\bigotimes_{v\notin S}\phi_v^0$ の形のものを取れば、$\Re(s)$ が十分大きいときには大域的な絡作用素の関数等式 [MW94] から

$$\begin{aligned}\phi&=J_{P|\bar{P}}(\rho_{\mathbb{A}}[s]\otimes\tau_{\mathbb{A}})\circ J_{\bar{P}|P}(\rho_{\mathbb{A}}[s]\otimes\tau_{\mathbb{A}})\phi\\&=\bigotimes_{v\notin S}\frac{L(s,\tau_v^\vee\times\rho_v)L_{\mathrm{Asai}}(2s,\rho_v)L(-s,\tau_v\times\rho_v^\vee)L_{\mathrm{Asai}}(-2s,\rho_v^\vee)}{L(1-s,\tau_v\times\rho_v^\vee)L_{\mathrm{Asai}}(1-2s,\rho_v^\vee)L(s+1,\tau_v^\vee\times\rho_v)L_{\mathrm{Asai}}(2s+1,\rho_v)}\phi_v^0\\&\qquad\otimes\bigotimes_{v\in S}J_{P|\bar{P}}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)\circ J_{\bar{P}|P}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)\phi_v\\&=\frac{L^S(s,\tau_{\mathbb{A}}^\vee\times\rho_{\mathbb{A}})L^S_{\mathrm{Asai}}(2s,\rho_{\mathbb{A}})L^S(-s,\tau_{\mathbb{A}}\times\rho_{\mathbb{A}}^\vee)L^S_{\mathrm{Asai}}(-2s,\rho_{\mathbb{A}}^\vee)}{L^S(1-s,\tau_{\mathbb{A}}\times\rho_{\mathbb{A}}^\vee)L^S_{\mathrm{Asai}}(1-2s,\rho_{\mathbb{A}}^\vee)L^S(s+1,\tau_{\mathbb{A}}^\vee\times\rho_{\mathbb{A}})L^S_{\mathrm{Asai}}(2s+1,\rho_{\mathbb{A}})}\phi^S\\&\qquad\otimes\bigotimes_{v\in S}j^{G_v}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)\phi_v\end{aligned}$$

である。ここで、$L^S(\bullet)$ は $v\notin S$ についての部分 Euler 積で定まる部分 L 関数を表す。また $\phi^S:=\bigotimes_{v\notin S}\phi_v^0$ と書いた。よって

$$\begin{aligned}&\prod_{v\in S}j^{G_v}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)\\&=\frac{L^S(1-s,\tau_{\mathbb{A}}\times\rho_{\mathbb{A}}^\vee)L^S_{\mathrm{Asai}}(1-2s,\rho_{\mathbb{A}}^\vee)L^S(s+1,\tau_{\mathbb{A}}^\vee\times\rho_{\mathbb{A}})L^S_{\mathrm{Asai}}(2s+1,\rho_{\mathbb{A}})}{L^S(s,\tau_{\mathbb{A}}^\vee\times\rho_{\mathbb{A}})L^S_{\mathrm{Asai}}(2s,\rho_{\mathbb{A}})L^S(-s,\tau_{\mathbb{A}}\times\rho_{\mathbb{A}}^\vee)L^S_{\mathrm{Asai}}(-2s,\rho_{\mathbb{A}}^\vee)}\end{aligned}$$

であるが、ここに現れる部分 L 関数たちは有理型接続を持つことが知られているから、この等式も $s\in\mathbb{C}$ についての有理型関数の等式として意味を持つ。一方 G^* と $\rho_{\mathbb{A}}[s]\otimes\tau_{\mathbb{A}}^*$ についても同様の式が成り立つが、$\tau_v\simeq\tau_v^*,(\forall v\notin S)$ なのでその右辺は上式の右辺に一致する。すなわち、

$$\prod_{v\in S}j^{G_v}(\rho_v[s]\otimes\tau_v)=\prod_{v\in S}j^{G_v^*}(\rho_v[s]\otimes\tau_v^*)$$

が得られた。ところが、$v\neq v_1,\,v_2$ では再び $\tau_v\simeq\tau_v^*$ であるから、これは

$$j^{G_{2n}}(\rho[s]\otimes\tau)^2=j^{G_{2n}^*}(\rho[s]\otimes\tau^*)^2$$

と単純化する。さらに Plancherel 測度の定義を代入して

$$\gamma(G_{2n}/M)^{-4}\mu^{G_{2n}}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau)^2=\gamma(G_{2n}^*/M^*)^{-4}\mu^{G_{2n}^*}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau^*)^2\tag{2.5}$$

を得る。さて、虚軸上の s に対しては $\mu^{G_{2n}}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau)$, $\mu^{G_{2n}^*}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau^*)$ はともに非負実数であるから、命題の等式は (2.5) から従う。ところが Plancherel 測度は $s \mod 2\pi\sqrt{-1}/\log q_E\in\widehat{A}_M$ の有理関数であるから [今, § 9]、その Zariski 稠密部分集合

$$\widehat{A}_M^1:=\{\sqrt{-1}t \mod 2\pi\sqrt{-1}/\log q_E\in\widehat{A}_M\,|\,t\in\mathbb{R}\}$$

上での等式は全 $s\in\mathbb{C}$ に対する等式に延びる。上で E の剰余体の位数を q_E と書いた。最後に $\mu^{G_{2n}^*}(\rho|\ |_E^s\otimes\tau^*)$ は $\tau^*\in\mathrm{JL}(T)$ の取り方によらないから、命題の主張が成り立つ。 □

3 例—G_4の既約表現の分類

3.1 G_{2n}の主系列表現の可約性

ここではG_{2n}の主系列表現$I_{P_0}^{G_{2n}}(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau)$の可約点を決定する。そのために必要な$\tau\in\Pi_{\rm unit}(G_2(F))$の記述には、2.3.1節のJLと以下で復習する$G_2^*$の二乗可積分表現の$L$パケットの記述を使う。

一変数ユニタリ群を$U_{E/F}(1)$と書く。η,μで$E^\times$のユニタリ指標で各々$\eta|_{F^\times}=1$, $\mu|_{F^\times}=\omega_{E/F}$であるものを表す。$\eta$に対して$U_{E/F}(1)(F)$の指標

$$\eta_u:U_{E/F}(1)(F)\ni x\sigma(x)^{-1}\longmapsto\eta(x)\in\mathbb{C}$$

が定まる。これらを使ってG_2^*の二乗可積分なLパケットは次のように記述される。

(i) 安定Lパケット$\Pi^*(\pi)$は、その標準base changeリフトが$GL(2,E)$の超カスプ表現πである、唯一つの既約超カスプ表現τ^*からなる。

(ii) 内視Lパケット$\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2^*}(\mathbf{1},\eta)$, (但し、$\eta\neq\mathbf{1}$) は$U_{E/F}(1)(F)^2$の指標$\mathbf{1}\otimes\eta_u$の$L$埋め込み

$$\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2^*}:{}^L(U(1)^2)\ni(z_1,z_2)\rtimes w\longmapsto\begin{cases}\begin{pmatrix}z_1\mu(w)&\\&z_2\mu(w)\end{pmatrix}\times w&\text{if }w\in W_E,\\\begin{pmatrix}&-z_1\\z_2&\end{pmatrix}\rtimes w_\sigma&\text{if }w=w_\sigma\end{cases}\in{}^LG_2^*$$

に対応する内視リフト。2つの異なる超カスプ表現からなる。

(iii) Steinberg$L$パケット$\{\eta_u(\det)\delta^{G_2^*}\}$。ここで$\delta^{G_2^*}$は$G_2^*(F)$のSteinberg表現である。

これら各々の清水-Jacquet-Langlands対応による像を次のように書く。

(i) 安定Lパケット$\Pi(\pi)$。唯一つの既約超カスプ表現τからなる。

(ii) 内視Lパケット$\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta)$。2つの異なる超カスプ表現からなる[LL79]。

(iii) 安定Lパケット$\{\eta_u(\det)\}$。

さて、命題2.4から(2.4)において

$$\mu^{G_4}(\chi[s]\otimes\tau)=\frac{\gamma(G_4/M)^2}{\gamma(G_4^*/M^*)^2}\mu^{G_4^*}(\chi[s]\otimes\tau^*)$$

である。$\mu^{G_4^*}(\chi[s]\otimes\tau^*)$は[Sha90, 系3.6]により

$$\begin{aligned}&\mu^{G_4^*}(\chi[s]\otimes\tau^*)\\&=\gamma(G_4^*/M^*)^2\varepsilon(s,\tau^{*\vee}\times\chi,\bar\psi)\varepsilon(2s,\chi|_{F^\times},\bar\psi)\varepsilon(-s,\tau^*\times\chi^{-1},\psi)\varepsilon(-2s,\chi|_{F^\times}^{-1},\psi)\\&\quad\times\frac{L(1-s,\tau^*\times\rho^\vee)L(1-2s,\chi|_{F^\times}^{-1})L(s+1,\tau^{*\vee}\times\chi)L(2s+1,\chi|_{F^\times})}{L(s,\tau^{*\vee}\times\chi)L(2s,\chi|_{F^\times})L(-s,\tau^*\times\chi^{-1})L(-2s,\chi|_{F^\times}^{-1})}\end{aligned}$$

で与えられる。ここで ψ は F の非自明指標であり、1次の浅井・織田 L 因子 $L_{\mathrm{Asai}}(s,\chi)$ および ε 因子 $\varepsilon_{\mathrm{Asai}}(s,\chi,\psi)$ は各々 $\chi\in\Pi_{\mathrm{unit}}(E^\times)$ の $F^\times$ への制限の Hecke$L$ および ε 因子であることを使った。後は G_2^* の標準 L 因子 $L(s,\tau^*\times\chi)$ を計算すればよいが、これは [Kon01, 命題 3.2] から

$$L(s,\tau^*\times\chi)=L_E(s,\pi\times\chi)$$

となる。但し、$\pi\in\Pi(GL(2,E))$ は τ^*(の L パケット) の標準 base change リフトであり、右辺は $GL(2,E)$ の標準 L 因子である [JL70]。これらから主系列表現 $I_{P_0}^{G_{2n}}(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau)$ の Plancherel 測度が具体的に求まる。極大放物型部分群の超カスプ表現からの誘導表現の可約性を Plancherel 測度で記述した Silberger の結果 [Sil80, 補題 1.2] と組み合わせることにより次の定理が得られる。

定理 3.1. $\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau:=\chi_1|\ |_E^{\lambda_1}\otimes\cdots\otimes\chi_{n-1}|\ |_E^{\lambda_{n-1}}\otimes\tau$ は2.1節の通りで、$\lambda_i\in\mathbb{R}$ とする。

$$\mathfrak{r}_0:=\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\mid \text{ある } i \text{ に対して } \chi_i|_{F^\times}=\omega_{E/F} \text{ かつ } \lambda_i=0\}$$

$$\mathfrak{r}_H:=\left\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\ \middle|\ \text{ある } i\neq j \text{ に対して } \begin{array}{c}\chi_i=\chi_j \text{ かつ } \lambda_i=\lambda_j+1\\ \text{または}\\ \chi_i=\sigma(\chi_j)^{-1} \text{ かつ } \lambda_i=\pm1-\lambda_j\end{array}\right\},$$

と書く。このとき $I_{P_0}^{G_{2n}}(\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau)$ の可約点は次で与えられる。

(i) $\tau\in\Pi(\pi)$ の場合、$\mathfrak{r}_0\cup\mathfrak{r}_H\cup\mathfrak{r}_G$ である。ここで

$$\mathfrak{r}_G:=\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\mid \text{ある } i \text{ に対して } \chi_i|_{F^\times}=\mathbf{1}_{F^\times} \text{ かつ } \lambda_i=\pm1/2\}.$$

(ii) $\tau\in\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta),\ (\eta\neq\mathbf{1})$ の場合、$\mathfrak{r}_H\cup\mathfrak{r}_G$ である。ここで

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_G:=&\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\mid \text{ある } i \text{ に対して } \chi_i|_{F^\times}=\mathbf{1}_{F^\times} \text{ かつ } \lambda_i=\pm1/2\}\\ &\cup\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\mid \text{ある } i \text{ に対して } \chi_i|_{F^\times}=\omega_{E/F} \text{ かつ } \lambda_i=\pm1\}.\end{aligned}$$

(iii) $\tau=\mathbf{1}_{G_2}$ の場合、$\mathfrak{r}_0\cup\mathfrak{r}_H\cup\mathfrak{r}_G$ である。但し、

$$\begin{aligned}\mathfrak{r}_G:=&\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\mid \text{ある } i \text{ に対して } \chi_i|_{F^\times}=\mathbf{1}_{F^\times},\ \chi_i\neq\mathbf{1} \text{ かつ } \lambda_i=\pm1/2\}\\ &\cup\{\underline{\chi}[\underline{\lambda}]\otimes\tau\mid \text{ある } i \text{ に対して } \chi_i=\mathbf{1} \text{ かつ } \lambda_i=\pm3/2\}.\end{aligned}$$

3.2 G_4 の既約ユニタリ表現

上の定理から G_4 の既約ユニタリ表現の分類が得られる。η, μ 同様 η', μ' で $E^\times$ のユニタリ指標で、各々 $\eta'|_{F^\times}=1$, $\mu'|_{F^\times}=\omega_{E/F}$ を満たすものを表す。

定理 3.2. (1) $G_4(F)$ の既約二乗可積分表現は次の通りである。

表現	条件
π	カスプ表現
$\delta(\eta,\tau)\subset I_{P_0}^{G_4}(\eta\|\ \|_E^{1/2}\otimes\tau)$	$\tau\in\Pi(\pi)$, $\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta')$, $\eta'\neq\mathbf{1}$
$\delta(\mu,\tau)\subset I_{P_0}^{G_4}(\mu\|\ \|_E^{1/2}\otimes\tau)$	$\tau\in\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta))$, $\eta\neq\mathbf{1}$
$\delta(\mathbf{1},\mathbf{1}_{G_2})\subset I_{P_0}^{G_4}(\|\ \|_E^{3/2}\otimes\mathbf{1}_{G_2})$	
$\delta(\eta,\mathbf{1}_{G_2})\subset I_{P_0}^{G_4}(\eta\|\ \|_E^{1/2}\otimes\mathbf{1}_{G_2})$	$\eta\neq\mathbf{1}$

(2) $G_4(F)$ の二乗可積分でない既約緩増加表現は次の通りである。

表現	条件
$\tau^{G_4}(\mu,\tau)_\pm$	$\tau\in\Pi(\pi)$, 又は $\tau=\mathbf{1}_{G_2}$
$I_{P_0}^{G_4}(\mu\otimes\tau)$	$\tau\in\lambda_{\mu'^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta)$, $\eta\neq\mathbf{1}$
$I_{P_0}^{G_4}(\chi\otimes\tau)$	$\chi\|_{F^\times}\neq\omega_{E/F}$, $\tau\in\Pi_0(G_2(F))$

(3) $\chi\otimes\tau\in\Pi_0(M_0(F))$, $s\in\mathbb{R}_{\geq 0}$ に対して $I_{P_0}^{G_4}(\chi|\ |_E^s\otimes\tau)$ の Langlands 商を $J_{P_0}^{G_4}(\chi|\ |_E^s\otimes\tau)$ と書く。$G_4(F)$ の緩増加でないユニタリ化可能既約表現は次の通りである。

表現	条件
$J_{P_0}^{G_4}(\eta\|\ \|_E^s\otimes\tau)$	$\tau\in\Pi(\pi)$ または $\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta')$, $\eta'\neq\mathbf{1}$, $1/2\geq s>0$
$J_{P_0}^{G_4}(\mu\|\ \|_E^s\otimes\tau)$	$\tau\in\lambda_{\mu^{-1}}^{G_2}(\mathbf{1},\eta)$, $\eta\neq\mathbf{1}$, $1/2\geq s>0$
$J_{P_0}^{G_4}(\|\ \|_E^s\otimes\mathbf{1}_{G_2})$	$3/2\geq s>0$
$J_{P_0}^{G_4}(\eta\|\ \|_E^s\otimes\mathbf{1}_{G_2})$	$\eta\neq\mathbf{1}$, $1/2\geq s>0$

参考文献

[Art78] James G. Arthur. A trace formula for reductive groups. I. Terms associated to classes in $G(\mathbf{Q})$. *Duke Math. J.*, 45(4):911–952, 1978.

[BZ76] I. N. Bernšteĭn and A. V. Zelevinskiĭ. Representations of the group $GL(n,F)$, where F is a local non-Archimedean field. *Uspehi Mat. Nauk*, 31(3(189)):5–70, 1976.

[BZ77] I. N. Bernstein and A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. I. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 10(4):441–472, 1977.

[DKV84] P. Deligne, D. Kazhdan, and M.-F. Vignéras. Représentations des algèbres centrales simples p-adiques. In *Representations of reductive groups over a local field*, pages 33–117. Hermann, Paris, 1984.

[DL71] Michel Duflo and Jean-Pierre Labesse. Sur la formule des traces de Selberg. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 4:193–284, 1971.

[Hen84] Guy Henniart. La conjecture de Langlands locale pour GL(3). *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (11-12):186, 1984.

[JL70] H. Jacquet and R. P. Langlands. *Automorphic forms on* GL(2). Springer-Verlag, Berlin, 1970. Lecture Notes in Mathematics, Vol. 114.

[Kon01] Kazuko Konno. Induced representations of U(2, 2) over a p-adic field. *J. Reine Angew. Math.*, 540:167–204, 2001.

[Lan71] Robert P. Langlands. *Euler products*. Yale University Press, New Haven, Conn., 1971. A James K. Whittemore Lecture in Mathematics given at Yale University, 1967, Yale Mathematical Monographs, 1.

[LL79] J.-P. Labesse and R. P. Langlands. L-indistinguishability for $SL(2)$. *Canad. J. Math.*, 31(4):726–785, 1979.

[Mœgl] Colette Mœglin. Sur la classification des séries discrètes des groupes classiques; paramètres de langlands et exhaustivité. preprint, 1999.

[MS00] Goran Muić and Gordan Savin. Complementary series for hermitian quaternionic groups. *Canad. J. Math.*, 43(1):90–99, 2000.

[MT02] Colette Mœglin and Marko Tadić. Construction of discrete series for classical p-adci groups. *J. of Amer. Math. Soc.*, 15(3):715–786, 2002.

[Mui97] Goran Muić. The unitary dual of p-adic G_2. *Duke Math. J.*, 90(3):465–493, 1997.

[MW94] Colette Mœglin and Jean-Loup Waldspurger. *Décomposition spectrale et séries d'Eisenstein*. Birkhäuser Verlag, Basel, 1994. Une paraphrase de l'Écriture. [A paraphrase of Scripture].

[Rog90] Jonathan D. Rogawski. *Automorphic representations of unitary groups in three variables*. Princeton University Press, Princeton, NJ, 1990.

[Sha90] Freydoon Shahidi. A proof of Langlands' conjecture on Plancherel measures; complementary series for p-adic groups. *Ann. of Math. (2)*, 132(2):273–330, 1990.

[Sil80] Allan J. Silberger. Special representations of reductive p-adic groups are not integrable. *Ann. of Math.*, 111:571–587, 1980.

[ST93] Paul J. Sally, Jr. and Marko Tadić. Induced representations and classifications for $GSp(2, F)$ and $Sp(2, F)$. *Mém. Soc. Math. France (N.S.)*, (52):75–133, 1993.

[Tat79] J. Tate. Number theoretic background. In *Automorphic forms, representations and L-functions (Proc. Sympos. Pure Math., Oregon State Univ., Corvallis, Ore., 1977), Part 2*, pages 3–26. Amer. Math. Soc., Providence, R.I., 1979.

[Wei] A Weil. *Basic number theory.* Springer Verlag.

[Zel80] A. V. Zelevinsky. Induced representations of reductive $\mathfrak{p}$-adic groups. II. On irreducible representations of $\mathrm{GL}(n)$. *Ann. Sci. École Norm. Sup. (4)*, 13(2):165–210, 1980.

[今] 今野拓也. Waldspurger による p 進簡約群の plancherel 公式の構成. **この報告集**